34. Задача Коши. Простейшие методы решения. Примеры

Простейшее ОДУ имеет вид: . Для него может быть поставлена задача Коши: найти решение ,   
 удовлетворяющее исходному уравнению и начальному условию . Другими словами, требуется получить интегральную кривую , проходящую через заданную точку . Существование и единственность решения задачи следует из локальной теоремы Коши-Пикара: если определена и непрерывна в прямоугольнике и в нем удовлетворяет условию Липшица по , т.е.

то на отрезке , где , , существует единственное решение задачи Коши. Локальная теорема Коши-Пикара дает достаточные условия разрешимости задачи Коши для широкого класса ОДУ, однако на практике проверка условия Липшица не удобна. Сформулируем еще одну локальную теорему существования и единственности с более простым условием: пусть определена и непрерывна вместе со своей частной производной в некоторой области , тогда существует единственное решение с начальным условием .

Численное решение на отрезке задачи Коши состоит в построении таблицы приближенных значений решения в узлах сетки .

1. Одношаговые
   1. Метод Эйлера (общий случай с весовым коэффициентом, при и – получается явная и неявная схема соответственно). Погрешность на шаге и в целом .
   2. Неявный метод Рунге-Кутта 2 порядка или модифицированный метод Эйлера «с пересчетом». Погрешность на шаге и в целом .

Прогноз: ; Коррекция: , можно делать несколько раз, подставляя .

* 1. Метод Рунге-Кутта 4 порядка. Погрешность на шаге и в целом .

1. Многошаговые методы Адамса (требуют предварительное вычисление в начальных точках). Погрешность на шаге .
   1. Метод Адамса-Башфорта (экстраполяционный, явный):
   2. Метод Адамса-Мультона (интерполяционный, неявный):

При одинаковом метод Адамса-Мультона точнее, но требует решения нелинейной системы уравнений для нахождения значения .